

7.5.18 Obecná rovnice hyperboly

Předpoklady: 7517

Př. 1: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice

$$\text{asymptot hyperboly } \frac{(y-1)^2}{3} - (x+2)^2 = 1.$$

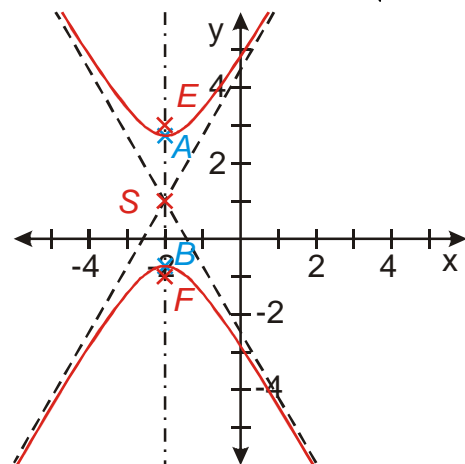
Hlavní osou je přímka $x = -2$, střed $S[-2;1]$.

Hlavní poloosa: $b = \sqrt{3}$, vedlejší poloosa $a = 1$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow e = 2$.

Vrcholy: $A[-2;1+\sqrt{3}]$, $B[-2;1-\sqrt{3}]$, ohniska: $E[-2;3]$, $F[-2;-1]$.

Rovnice asymptot: $x+2 = \frac{y-1}{\sqrt{3}}$, $x+2 = -\frac{y-1}{\sqrt{3}}$.



Stejně jako u ostatních kuželoseček získáme po roznásobení a odstranění zlomků obecnou rovnici hyperboly.

Středovou rovnici hyperboly můžeme upravit do tvaru:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0; \quad pq < 0, \text{ který nazýváme } \mathbf{obecná rovnice hyperboly}.$$

Př. 2: Vysvětli, proč je u obecné rovnice hyperboly uvedena podmínka $pq < 0$.

Musíme zajistit, aby před jedním ze členů ve středové rovnici bylo záporné znaménko. Součin pq je menší než nula, právě když je jedno z čísel p, q záporné.

Stejně jako u elipsy a paraboly nemá cenu zabývat se koeficienty v obecném tvaru. Vždy je lepší převést rovnici na středový tvar.

Při upravování rovnic je potřeba dát pozor na členy, před jejichž závorkou je mínus:

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - (y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2) - 4 = 4(x+1)^2 - 4 - (y+2)^2 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{po roznásobení zbytku závorky vznikne ze záporného čísla uvnitř závorky číslo kladné.}$$

Pedagogická poznámka: Přes předchozí upozornění je mínus před y-vou závorkou nejčastější příčinou chyb při upravování obecných rovnic hyperbol. U následujícího příkladu nechávám studenty v první fázi pouze převádět na středový tvar (novinka v tomto okamžiku). Kreslení hyperbol a určování koeficientů nebo souřadnic necháváme na zbytek hodiny nebo spíše na doma.

Př. 3: U následujících hyperbol najdi středový tvar. V případě dostatku času nakresli obrázek, vypočti souřadnice středu, vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot.

a) $4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$

b) $2x^2 - 4y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$

c) $4x^2 + 8x - 4y^2 + 4y + 3 = 0$

d) $9x^2 - 4y^2 + 12y - 45 = 0$

a) $4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 4x^2 + 8x - y^2 - 4y - 4 = 0$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - (y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2) - 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 - (y+2)^2 + 4 - 4 = 0$$

$$4(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4 \quad /:4$$

$$(x+1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

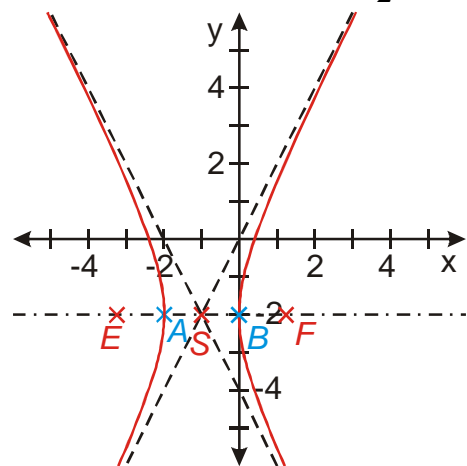
Hlavní osou je přímka $y = -2$, střed $S[-1; -2]$.

Hlavní poloosa: $a = 1$, vedlejší poloosa $b = 2$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} \Rightarrow e = \sqrt{5}$.

Vrcholy: $A[0; -2]$, $B[-2; -2]$, ohniska: $E[-1 - \sqrt{5}; -2]$, $F[-1 + \sqrt{5}; -2]$.

Rovnice asymptot: $x+1 = \frac{y+2}{2}$, $x+1 = -\frac{y+2}{2}$.



b) $2x^2 - 4y^2 + 4x + 8y + 2 = 0 \quad /:2$

$$x^2 - 2y^2 + 2x + 4y + 1 = (x^2 + 2x + 1 - 1) - 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 2(y-1)^2 + 1 + 2 - 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 2(y-1)^2 = -2 \quad /:(-2)$$

$$\frac{(x+1)^2}{-2} - \frac{2(y-1)^2}{-2} = 1$$

$$(y-1)^2 - \frac{(x+1)^2}{2} = 1$$

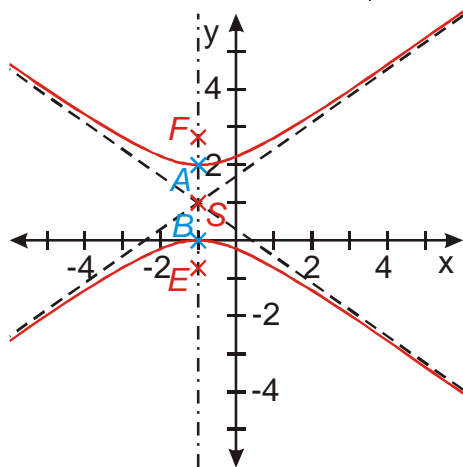
Hlavní osou je přímka $x = -1$, střed $S[-1;1]$.

Hlavní poloosa: $b = 1$, vedlejší poloosa $a = \sqrt{2}$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} \Rightarrow e = \sqrt{3}$.

Vrcholy: $A[-1;2]$, $B[-1;0]$, ohniska: $E[-1;1-\sqrt{3}]$, $F[-1;1+\sqrt{3}]$.

Rovnice asymptot: $y-1 = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $y-1 = -\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.



$$c) 4x^2 + 8x - 4y^2 + 4y + 3 = 4(x^2 + 2x) - 4(y^2 - y) + 3 = 0$$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - 4\left[y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 3 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 - 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 3 = 4(x+1)^2 - 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \text{ - nejde o rovnici hyperboly.}$$

$$\text{Rozdíl můžeme rozložit na dvě závorky: } \left(x+1 - y + \frac{1}{2}\right)\left(x+1 + y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

rovnice dvou přímek $2x - 2y + 3 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$.

$$d) 9x^2 - 4y^2 + 12y - 45 = 9x^2 - 4(y^2 - 3y) - 45 = 0$$

$$9x^2 - 4\left[y^2 - 2y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 45 = 9x^2 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 9 - 45 = 0$$

$$9x^2 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 36 \quad /:36$$

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{9} = 1$$

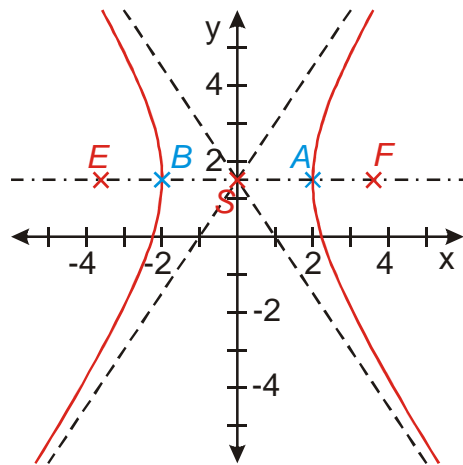
Hlavní osou je přímka $y = \frac{3}{2}$, střed $S\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Hlavní poloosa: $a = 2$, vedlejší poloosa $b = 3$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} \Rightarrow e = \sqrt{13}$.

Vrcholy: $A\left[-2; \frac{3}{2}\right]$, $B\left[2; \frac{3}{2}\right]$, ohniska: $E\left[-\sqrt{13}; \frac{3}{2}\right]$, $F\left[\sqrt{13}; \frac{3}{2}\right]$.

Rovnice asymptot: $\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{3}$, $\frac{x}{2} = -\frac{y - \frac{3}{2}}{3}$.



Př. 4: Petáková:
strana 128/cvičení 76 b) e) f)

Shrnutí: Obecná rovnice hyperboly se do středového tvaru upravuje podobně jako u elipsy.